نمایش سیستم های چند متغیره

علی خاکی صدیق

گروه کنترل- مهر ۱۳۹۴

- **مقدمه**

  - طراحی سیستم های کنترل: سیستم های کنترل مبتنی بر مدل ریاضی
  - مدل سیستم: مدل تحلیلی ریاضی
    مدل های به دست آمده از شناسایی سیستم
    مدل های محاسبات نرم

  - مدل ریاضی: روشهای تحلیل و طراحی سیستم های کنترلی

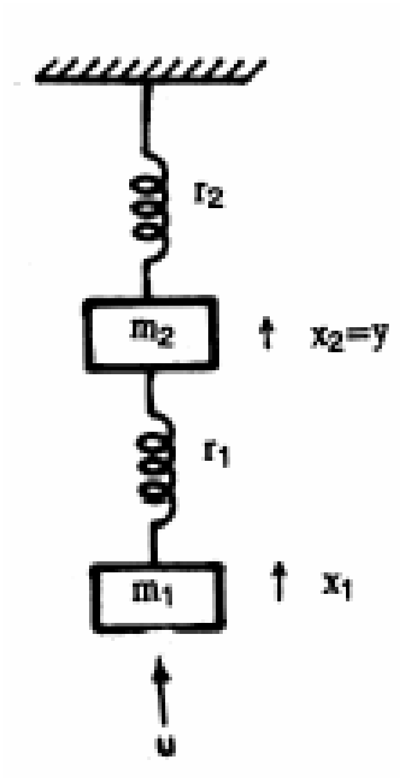
- توصیف سیستم های چندمتغیره:
  - مدل فضای حالت
  - مدل تابع تبدیل
  - مدل ماتریس سیستم یا

    Polynomial Matrix Description (PMD)
  - مدل کسر ماتریسی یا

    Matrix Fraction Description (MFD)

- **توصیف ماتریس سیستم**

یک مثال: سیستم جرم و فنر



معادلات دیفرانسیل و جبری سیستم:

$$m_1 \ddot{x}_1 = u - r_1(x_1 - x_2)$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = r_1(x_1 - x_2) - r_2 x_2$$
$$y = x_2$$

$$\Longrightarrow$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + r_1(x_1 - x_2) = u$$
$$m_2 \ddot{x}_2 - r_1(x_1 - x_2) + r_2 x_2 = 0$$
$$y = x_2$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} m_1 \dfrac{d^2}{dt^2} + r_1 & -r_1 \\ -r_1 & m_2 \dfrac{d^2}{dt^2} + r_2 + r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u$$

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) \qquad R\left(\frac{d}{dt}\right) \qquad W\left(\frac{d}{dt}\right) \qquad \xi(t) \qquad Q\left(\frac{d}{dt}\right)$$

و در حالت کلی:

بردار n بعدی متغیرهای سیستم

بردار m بعدی متغیرهای ورودی

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t)=Q\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)$$

$$y(t)=R\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t)+W\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)$$

بردار l بعدی متغیرهای خروجی

تبدیل لاپلاس با شرایط اولیه صفر می دهد:

$$P(s)\xi(s)=Q(s)U(s)$$
$$Y(s)=R(s)\xi(s)+W(s)U(s)$$

باز نویسی می دهد:

$$\begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi(s) \\ -U(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -Y(s) \end{bmatrix}$$

Rosenbrock System Matrix   ماتریس سیستم روزنبراک

چند نکته:

- تابع تبدیل از ماتریس سیستم
- مرتبه سیستم (System Order) از ماتریس سیستم
- ماتریس سیستم و فضای حالت

$$\begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \\ -R(s) & W(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi(s) \\ -U(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -Y(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} sI-A & B \\ -C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(s) \\ -U(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -Y(s) \end{bmatrix}$$

- سیستم های سره و اکیدا سره

- **توصیف کسر ماتریسی**

ماتریس تابع تبدیل ماتریسی است از توابع گویا که می تواند به صورت حاصل ضرب دو ماتریس از توابع چند جمله ای نوشته شود که *توصیف کسر ماتریسی* نامیده می شود.

$$G(s)=\left[g_{ij}(s)\right]=\left[\frac{b_{ij}(s)}{a_{ij}(s)}\right]\Rightarrow\quad G(s)=N_R(s)D_R^{-1}(s)=D_L^{-1}(s)N_L(s)$$

یک مثال ساده:

$$G(s)=\frac{s+1}{s^3+5s-1}=(s+1)\left(s^3+5s-1\right)^{-1}=\left(s^3+5s-1\right)^{-1}(s+1)$$

یک مثال ساده دیگر:

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & (s+1) \\ (s+2) & (s+1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$G(s)=\begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2) & 0 \\ 0 & (s+1)^2(s+2) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & (s+1) \\ (s+2) & (s+1)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{Left MFD})$$

$$=\begin{bmatrix} (s+2)(s+1) & (s+1) \\ (s+2) & (s+1)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (s+1)^2(s+2) & 0 \\ 0 & (s+1)^2(s+2) \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{Right MFD})$$

یک مثال دیگر:

$$G(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}\begin{bmatrix} s^2 & 2 \\ -2 & s^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} s^2+2s+2 & 0 \\ 0 & s^2+2s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} s^2 & 2 \\ -2 & s^2 \end{bmatrix}$$

$$=\left(\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} s^2 & 2 \\ -2 & s^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} s^2 & 2 \\ -2 & s^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}$$

نکته کلیدی: MFDها یکتا نیستند.

$$\bar{D}_L(s) = W^{-1}(s)D_L(s), \qquad \bar{N}_L(s) = W^{-1}(s)N_L(s)$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \bar{G}(s) &= \bar{D}_L^{-1}(s)\bar{N}_L(s) \\ &= D_L^{-1}(s)W(s)W^{-1}(s)N_L(s) \\ &= D_L^{-1}(s)N_L(s) \\ &= G(s) \end{aligned}$$

- خواص MFDهای چپ و راست مشابه است.

مرتبه MFDها :

$$G(s) = D_L^{-1}(s) N_L(s)$$

$$\Rightarrow \qquad \deg\det D_L(s) \;\square\; \deg D_L(s) \;\square\; \text{MFD Order}$$

- مقسوم علیه مشترک چپ و راست ماتریس های چند جمله ای:

$$D_L(s) = W(s)\bar{D}_L(s), \qquad N_L(s) = W(s)\bar{N}_L(s)$$

$$D_R(s) = \bar{D}_R(s)W(s), \qquad N_R(s) = \bar{N}_R(s)W(s)$$

- ماتریس تک مدولی
- ماتریس های چند جمله ای نسبت به هم اول از طرف چپ و راست.

MFDهای نسبت به هم اول یا می نیمال:

$$G(s)=D_L^{-1}(s)N_L(s)$$

$$\text{A Minimal MFD Representation} \Leftrightarrow N_L, D_L \text{ are Relatively Prime}$$

- دو خاصیت بزرگترین مقسوم علیه مشترک چپ ماتریس های چند جمله ای:

$$1.\ D_L(s)=W(s)\bar{D}_L(s), \qquad N_L(s)=W(s)\bar{N}_L(s)$$

$$2.\ \forall W_1(s)-\text{Another Left Divisor}, \exists R(s), \text{ s.t. } W(s)=W_1(s)R(s)$$

- یک روش تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک با استفاده از *ماتریس های مقدماتی*

- **یک مثال**

$$\bar{N}_L(s)=\begin{bmatrix} s & s^2+s \\ s+2 & s+2 \end{bmatrix},\quad \bar{D}_L(s)=\begin{bmatrix} -s & s^2+s \\ s-2 & s+2 \end{bmatrix}$$

فاکتور چپ مشترک

$$\bar{N}_L(s)=\begin{bmatrix} 0 & s \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s & s^2+s \\ s+2 & s+2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{D}_L(s)=\begin{bmatrix} 0 & s \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -s & s^2+s \\ s-2 & s+2 \end{bmatrix}$$

آیا نمایش جدید می نیمال است؟

$$N_L(s)=\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix},\quad D_L(s)=\begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که

$$N_L(s)=\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix},$$

$$D_L(s)=\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

نمایش جدید می نیمال است

$$\overset{\frown}{N}_L(s)=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix},\overset{\frown}{D}_L(s)=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

استفاده از الگوریتم پیدا کردن بزرگترین فاکتور مشترک:

Form, $\begin{bmatrix} s & s^2+s & -s & s^2+s \\ s+2 & s+2 & s-2 & s+2 \end{bmatrix}$ and perform the following operations:

C2-C4 $\Rightarrow \begin{bmatrix} s & s^2+s & -s & 0 \\ s+2 & s+2 & s-2 & 0 \end{bmatrix}$, C1+C3 $\Rightarrow \begin{bmatrix} s & s^2+s & 0 & 0 \\ s+2 & s+2 & 2s & 0 \end{bmatrix}$

$-(s+1)$C1+C2 $\Rightarrow \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ s+2 & -s(s+2) & 2s & 0 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{2}(s+2)$C3+C2 $\Rightarrow \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ s+2 & 0 & 2s & 0 \end{bmatrix}$, C3 $\leftrightarrow$ C2 $\Rightarrow \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ s+2 & 2s & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Hence, $W(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ s+2 & 2s \end{bmatrix}$, and

$$\bar{N}_L(s) = \begin{bmatrix} s & s^2+s \\ s+2 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ s+2 & 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & -\frac{1}{2}s-1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{D}_L(s) = \begin{bmatrix} -s & s^2+s \\ s-2 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ s+2 & 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & s+1 \\ 1 & -\frac{1}{2}s-1 \end{bmatrix}$$