

# پایداری سیستم های چندمتغیره

علی خاکی صدیق

گروه کنترل - شهرپور ۱۳۸۷

## ● مقدمه

- مفاهیم پایه و مروری بر تعاریف
- پایداری داخلی
- تحلیل پایداری سیستم های چند متغیره در حوزه فرکانس
- آرایه های نایکوئیست و باندهای گرشگورین
- غلبه قطری

## • تعاریف پایداری

- پایدار به مفهوم لیاپانوف

- پایدار مجانبی

- پایدار مجانبی جامع (در کل)

- شرایط پایداری های بالا در نمایش فضای حالت سیستم های خودگردان یا بدون ورودی

## ■ تعریف پایداری ورودی-خروجی سیستم

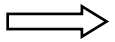
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, C \in R^{m \times n}$$

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

$$u(t) = Ke(t)$$



$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c r(t)$$

$$y(t) = C_c x(t) + D_c r(t)$$

$$A_c = A - B(K^{-1}I_m + D)^{-1}C, B_c = BK - B(K^{-1}I_m + D)^{-1}DK$$

$$C_c = (I_m + DK)^{-1}C, D_c = (I_m + DK)^{-1}DK$$

پاسخ سیستم حلقه بسته:

$$x(t; x(t_0), t_0) = \exp(A_c t) x(t_0) + \int_{t_0}^t \exp[A_c(t - \tau)] B_c r(\tau) d\tau$$

اگر سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی باشد:

$$\|\exp(A_c t)\| \leq p \exp(-at), \quad a, p \in R^+, \forall t \geq 0$$

از طرف دیگر:

$$\|y(t)\| \leq \|C_c x(t)\| + \|D_c r(t)\|$$

$$\leq \|D_c r(t)\| + \|C_c \exp(A_c t) x(t_0)\| + \|C_c\| \int_{t_0}^t \|\exp[A_c(t - \tau)]\| \|B_c r(\tau)\| d\tau$$

$$\leq dM + cp \|x(t_0)\| + cbMp / a$$

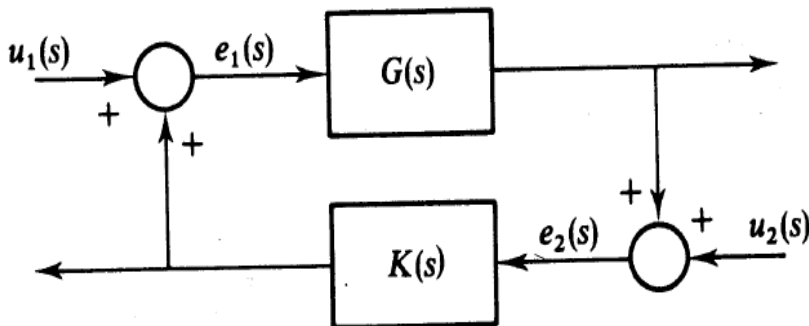
قضیه اگر مبدا فضای حالت سیستم پایدار مجانبی باشد، سیستم پایدار ورودی-خروجی است.

**نکته** کنترل پذیری و رویت پذیری نمایش فضای حالت.  
**نکته** چند جمله ای مشخصه و چند جمله ای قطب.

# • پایداری داخلی

■ **تعریف** پایداری نمایی Exponential Stability

■ **تعریف** پایداری داخلی Internal Stability



$$\begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$



شرط لازم وکافی پایداری داخلی  
= پایداری نمایی ماتریس تابع تبدیل

توجه کنید که:

$$H_{11}(s) = [I - K(s)G(s)]^{-1}$$

$$H_{12}(s) = [I - K(s)G(s)]^{-1} K(s)$$

$$H_{21}(s) = [I - G(s)K(s)]^{-1} G(s)$$

$$H_{22}(s) = [I - G(s)K(s)]^{-1}$$

و هم چنین:

$$H_{11}(s) = I + K(s)H_{21}(s)$$

$$H_{12}(s) = H_{11}(s)K(s)$$

$$H_{22}(s) = I + H_{21}(s)K(s)$$



## قضيه

If  $K(s)$  is exponentially stable, then the feedback system is internally stable  $\Leftrightarrow H_{21}(s)$  is exponentially stable.

## قضيه

If  $K(s)$  is exponentially stable, then  $H_{21}(s)$  is exponentially stable  $\Leftrightarrow$

1.  $\det[I - G(s)K(s)]$  has no zeros in CRHP.

2.  $[I - G(s)K(s)]^{-1}G(s)$  is analytic at every CRHP pole of  $G(s)$ .

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s-1} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \quad K(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s)K(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow \det[I - G(s)K(s)] = \det \begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & \frac{-1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s}{s+1} \end{bmatrix} = \frac{s^2 + 1}{(s+1)^2}, \text{ But}$$

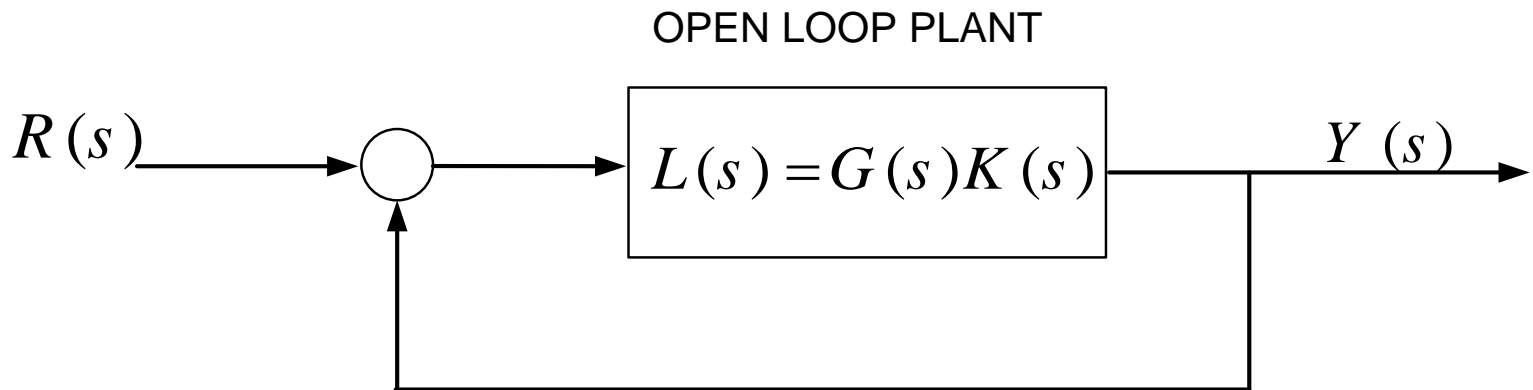
$$(I - G(s)K(s))^{-1} G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^2} & \frac{s+1}{s^2-1} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

## چند نکته:

- فیدبک مثبت و منفی
- معیار پایداری نایکوئیست
- طراحی و حذف قطب-صفر ناپایدار

# ● تحلیل پایداری سیستم های چند متغیره در حوزه فرکانس

- تعمیم ایده ها از سیستم های SISO به MIMO
- پایداری مقاوم از ایده های اولیه
- تحلیل پایداری حلقه بسته از اطلاعات حلقه باز
- تحلیل پایداری نایکوئیست
- شمای کلی:



## چند جمله ای های حلقه بسته (CLCP) و حلقه باز (OLCP):

$F(s) \triangleq I + L(s)$       The Return Difference Matrix

$L(s)$       The Return Ratio Matrix

The Minimal Realization of  $L(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

Then,  $\det F(s) = \det \left[ I_m + C (sI - A)^{-1} B + D \right]$

Using the Schur Formula:  $\det F(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -C & I_m + D \end{bmatrix}}{\det [sI_n - A]}$

$$\det F(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -C & I_m + D \end{bmatrix}}{\det [sI_n - A]}$$

The Return Difference Matrix is *Well-Posed*.

$$= \frac{\det \begin{bmatrix} I_n & -B(I_m + D)^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} sI_n - A & B \\ -C & I_m + D \end{bmatrix}}{\det [sI_n - A]}$$

$$= \frac{\det \begin{bmatrix} sI_n - A + B(I_m + D)^{-1}C & 0 \\ -C & I_m + D \end{bmatrix}}{\det [sI_n - A]}$$

$$= \frac{\det [sI_n - A + B(I_m + D)^{-1}C] \det [I_m + D]}{\det [sI_n - A]}$$

ماتریس حالت سیستم حلقه بسته

$$\begin{aligned} \text{Note that: } \det F(\infty) &= \det [I_m + D] \\ \Rightarrow \frac{\det F(s)}{\det F(\infty)} &= \frac{\det [sI - A_c]}{\det [sI - A]} \triangleq \frac{\text{CLCP}}{\text{OLCP}} \\ \Rightarrow \text{CLCP} &= \frac{\det F(s)}{\det F(\infty)} \text{OLCP} \end{aligned}$$

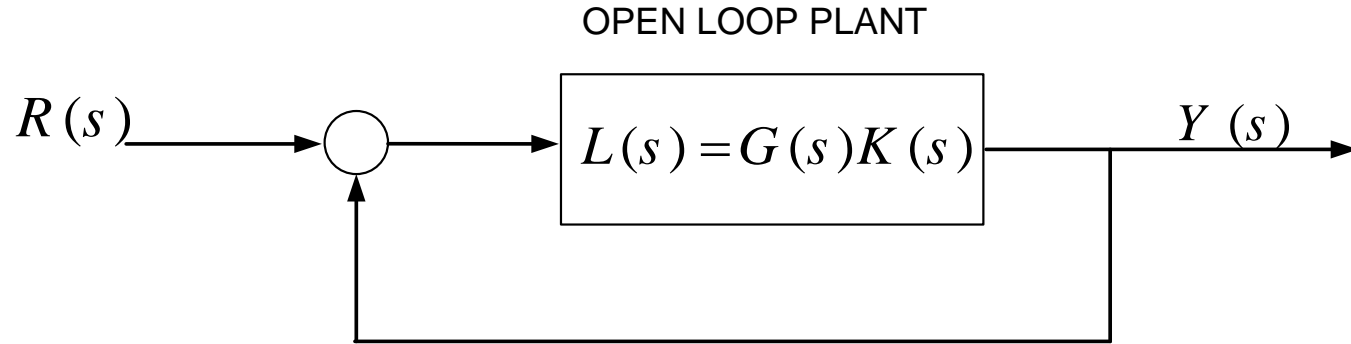
$$\begin{aligned} \text{Example: } L(s) &= \begin{bmatrix} \frac{3}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{s+1} \end{bmatrix} \Rightarrow F(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{s+1} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \text{CLCP} &= \frac{\det F(s)}{\det F(\infty)} \text{OLCP} = \frac{s+2}{s+1} (s-1)(s+1) = (s+2)(s-1) \end{aligned}$$

$$\text{Example: } L(s) = \begin{bmatrix} \frac{-s^2 + s + 1}{s^2 - 1} & \frac{1}{s - 1} \\ \frac{1}{s^2 - 1} & \frac{1}{s - 1} \end{bmatrix} \Rightarrow I + L(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 - 1} & \frac{1}{s - 1} \\ \frac{1}{s^2 - 1} & \frac{s}{s - 1} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  This is not a well-posed plant!



# • معیار پایداری نایکوئیست چند متغیره (تعمیم یافته)



- ایده و کاربرد کلیدی نایکوئیست SISO
- فرض پایداری داخلی
- اصل آرگومان:

Let  $f(s)$  be a rational function and  $C$  a closed contour in the complex plane. Then, assuming:

1.  $f(s)$  is analytic along  $C$ , i.e.  $f(s)$  has no poles on  $C$ .
2.  $f(s)$  has  $Z$  zeros inside  $C$ .
3.  $f(s)$  has  $P$  poles inside  $C$ .

Then, "The image of  $f(s)$  as  $s$  traverses  $C$  once in cw direction will make  $Z - P$  cw encirclements of the origin.

با توجه به اینکه:

$$\det F(s) = \frac{\text{CLCP}}{\text{OLCP}} \det F(\infty)$$

اگر مسیر انتخاب شده کانتور نایکوئیست باشد، داریم

$$N(0, \det F(s), D) = Z - P$$

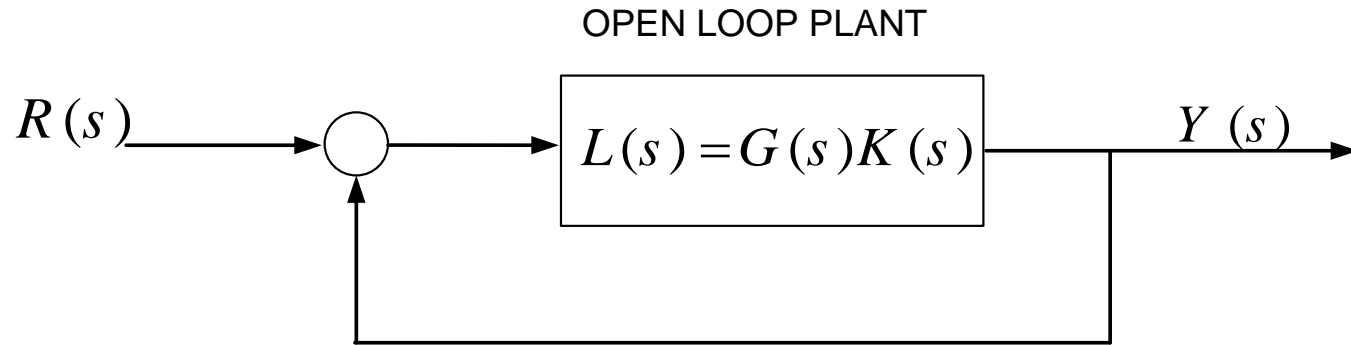
= Number of closed-loop poles in the RHP –  
Number of open-loop poles in the RHP

برای پایداری:

Number of closed-loop poles in the RHP Must be ZERO, i.e.  $Z = 0$ .

جمع بندی: (قضیه پایداری نایکوئیست چند متغیره (تعمیم یافته))

سیستم حلقه بسته زیر با فیدبک منفی، پایدار است اگر و فقط اگر



The Nyquist plot of  $F(s)$  makes  $P$  anti-cw encirclements of the origin and does not pass the origin.  $P$  is the number of open-loop poles in the RHP.

اکنون بهره حلقه را به این صورت فرض کنید:

$$L(s) = kG(s)$$

- حالت نایکوئیست SISO

- روند تعمیم به حالت ماتریسی: نایکوئیست MIMO

$\lambda_i(s)$  an eigenvalue of  $G(s) \Rightarrow$

$k \lambda_i(s)$  an eigenvalue of  $kG(s)$

$\Rightarrow 1 + k \lambda_i(s)$  is an eigenvalue of  $I + kG(s)$

$$\Rightarrow \det [ I + kG(s) ] = \prod_i \det [ 1 + k \lambda_i(s) ]$$

بنابراین می توان پایداری را با شمارش تعداد دور زدن های ۱- توسط توابع اسکالر زیر تعیین کرد:

$$k \lambda_i (s)$$

این گراف ها را مکان های مشخصه سیستم Characteristic Loci می نامند.

این گراف ها یا مکان های مشخصه سیستم اغلب غیرگویا هستند. ولذا با مشکل تعداد دور زدن ها حول نقطه ۱- روبرو می شویم.

تعداد این گراف ها یا مکان های مشخصه برای ماتریس تابع تبدیل  $m \times m$  برابر  $m$  است.

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{s-1}{s+1} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2}(s) = \pm \sqrt{\frac{s-1}{s+1}}$$

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{s+1}{s} \\ \frac{s}{s+4} & \frac{2}{s+4} \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1(s) = 1, \lambda_2(s) = -\frac{s(s+3)}{s^2+6s+8}$$

چند نتیجه مهم بدون اثبات:

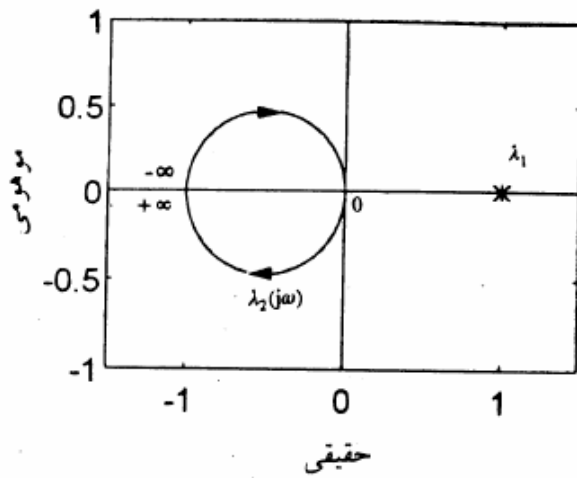
مکان های مشخصه توابع پیوسته ای از فرکانس هستند که حداکثر در تعداد محدودی از فرکانس با هم برخورد دارند.

اگر این گراف ها یا مکان های مشخصه را با هم رسم کنیم، یک یا چند منحنی مجزا به دست خواهد آمد.

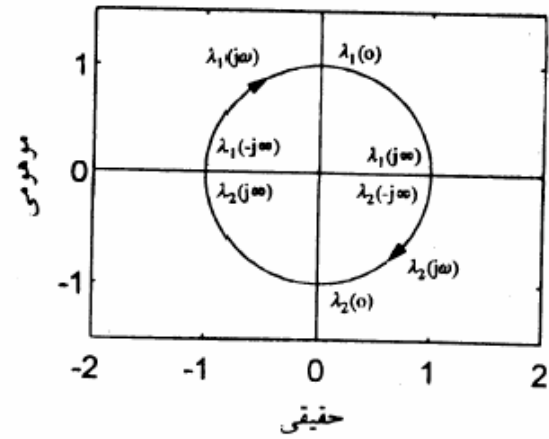
تعداد چرخش های حول مبدا این منحنی ها بدون ابهام امکان پذیر است.



**تعریف** دیاگرام نایکوئیست **تعمیم یافته** ماتریس تابع تبدیل  $G(s)$  مجموعه مکان هایی است که توسط مکان های مشخصه آن، به ازاء تغییرات  $s$  حول مسیر نایکوئیست ایجاد می شود.



شکل ۵-۷



شکل ۵-۶

مثال ۵-۶

دیاگرام‌های نایکوئیست تعمیم یافته ماتریس‌های توابع تبدیل  $G_1(s)$  و  $G_2(s)$  در مثال (۵-۵) به ترتیب در شکل‌های ۵-۶ و ۵-۷ نشان داده شده‌اند. توجه کنید که برای  $G_1(s)$ ، داریم

$$\lambda(s) = \pm \sqrt{\frac{s-1}{s+1}} = \pm \frac{\sqrt{s^2-1}}{(s+1)}$$

$$\lambda(j\omega) = \pm j \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{1+\omega^2} (1-j\omega) = \pm \left( \frac{\omega\sqrt{\omega^2+1}}{1+\omega^2} + j \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{1+\omega^2} \right)$$

که می‌دهد

$$\lambda_1(j\omega) \rightarrow (-1, +0), \omega \rightarrow -\infty, \quad \lambda_1(j\omega) \rightarrow (1, +0), \omega \rightarrow \infty$$

$$\lambda_2(j\omega) \rightarrow (1, -0), \omega \rightarrow -\infty, \quad \lambda_2(j\omega) \rightarrow (-1, -0), \omega \rightarrow \infty$$

**قضیه** (معیار پایداری نایکوئیست تعمیم یافته) اگر ماتریس تابع تبدیل  $G(s)$  تعداد  $P$  قطب ناپایدار داشته باشد، سیستم حلقه بسته با نسبت برگشتی  $kG(s)$  پایدار است اگر و فقط اگر  $k$  دیگرام نایکوئیست تعمیم یافته آن نقطه  $-1$  را  $P$  بار در جهت خلاف عقربه ساعت دور بزند. (فرض: سیستم حذف قطب-صفر ناپایدار ندارد).

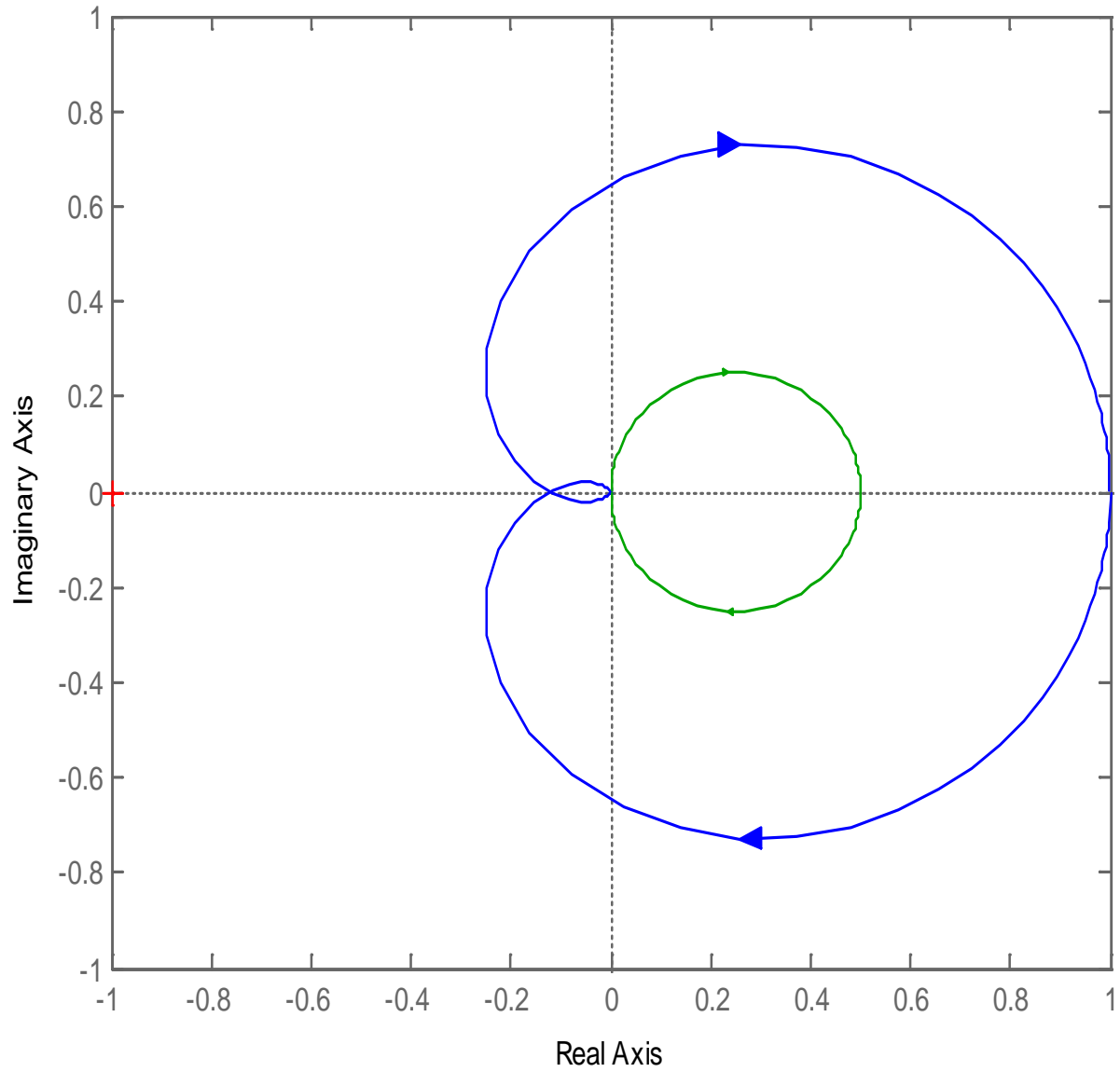
## مثال •

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.5(s+1)^2 + 1}{(s+1)^3} & \frac{-0.5(s-1)}{s+1} \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda(s)I - G(s)| = 0 \Rightarrow \left( \lambda(s) - \frac{0.5}{s+1} \right) \left( \lambda(s) - \frac{1}{(s+1)^3} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1(s) = \frac{0.5}{s+1}, \lambda_2(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

Nyquist Diagram



تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته: سیستم حلقه باز یک قطب ناپایدار  
دارد. لذا

$$-\infty < -\frac{1}{k} < -0.124 \Rightarrow N = Z - 1 = 0, \text{ Unstable with 1 RHP pole.}$$

$$-0.124 < -\frac{1}{k} < 0.5 \Rightarrow N = Z - 1 = 2, \text{ Unstable with 3 RHP pole.}$$

$$0.5 < -\frac{1}{k} < 1 \Rightarrow N = Z - 1 = 1, \text{ Unstable with 2 RHP pole.}$$

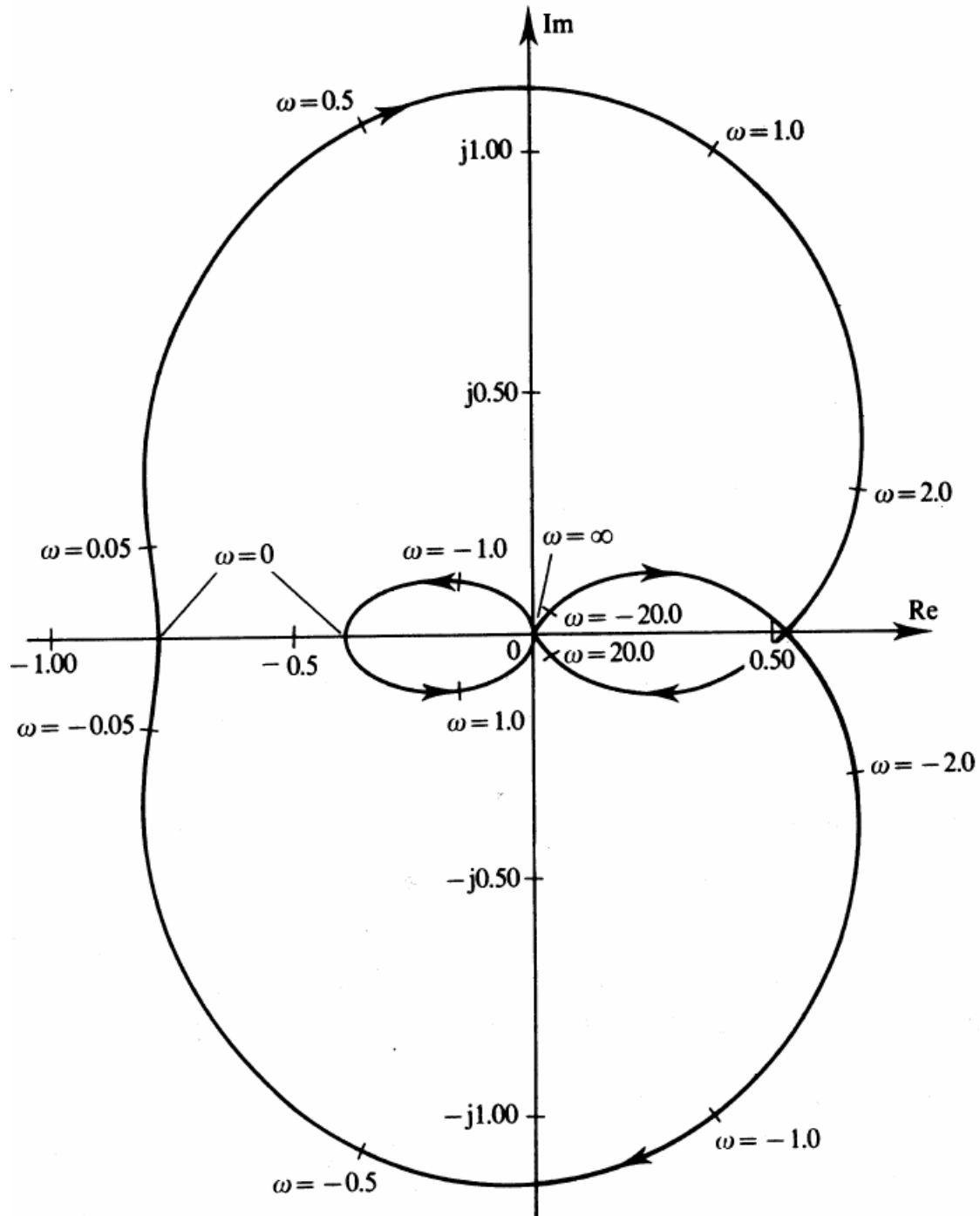
$$1 < -\frac{1}{k} < \infty \Rightarrow N = Z - 1 = 0, \text{ Unstable with 1 RHP pole.}$$

## • مثال

ماتریس تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$G(s) = \frac{k}{1.25(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ -6 & s-2 \end{bmatrix} .$$

بسادگی می‌توان نشان داد که قطبهای  $G(s)$  در  $-1$  و  $-2$  قرار دارند و لذا سیستم حلقه باز پایدار است (توجه کنید که قطبهای  $G(s)$  را باید از صورت اسمیث - مک میلان آن تعیین کرد). بنابراین برای پایداری سیستم حلقه بسته فیدبک منفی باید چرخش در جهت خلاف عقربه ساعت نقطه بحرانی نداشته باشیم. با در نظر گرفتن  $(-1/k, 0)$  به عنوان نقطه بحرانی، تأثیر پارامتر  $k$  در  $G(s)$  را بر روی پایداری حلقه بسته بررسی خواهیم کرد. با  $k=1$  دیاگرام‌های نایکوئیست تعمیم یافته در شکل ۵-۸ رسم شده‌اند [1].





شرایط پایداری زیر از شکل ۵-۸ بدست می آیند:

(i) برای  $-\infty < -1/k < -0.8$  ، چرخشی حول نقطه بحرانی ندارد و لذا سیستم حلقه بسته برای  $0 \leq k < 1.25$  پایدار است.

(ii) برای  $-0.8 < -1/k < -0.4$  ، یک چرخش حول نقطه بحرانی دارد و لذا سیستم حلقه بسته برای  $1.25 < k < 2.5$  ناپایدار است.

(iii) برای  $-0.4 < -1/k < 0$  ، چرخش حول نقطه بحرانی ندارد و لذا سیستم حلقه بسته برای  $2.5 < k < \infty$  پایدار است.

(iv) برای  $0 < -1/k < 0.533$  ، دو چرخش در جهت عقربه ساعت حول نقطه بحرانی دارد و لذا سیستم حلقه بسته برای  $-\infty < k < -1.875$  ناپایدار است.

(v) برای  $0.533 < -1/k \leq \infty$  ، چرخشی حول نقطه بحرانی ندارد و لذا سیستم حلقه بسته برای  $-1.875 < k \leq 0$  پایدار است.

- معیار پایداری نایکوئیست معکوس چند متغیره (تعمیم یافته)  
(Generalized Inverse Nyquist)

قضیه (معیار پایداری نایکوئیست معکوس تعمیم یافته) اگر ماتریس تابع تبدیل  $G(s)$  تعداد  $Z$  صفر انتقال ناپایدار داشته باشد، سیستم حلقه بسته با نسبت برگشتی  $kG(s)$  پایدار است اگر و فقط اگر دیاگرام نایکوئیست تعمیم یافته  $inv(G(s))/k$  نقطه  $-1$  را  $Z$  بار در جهت خلاف عقربه ساعت دور بزند. (فرض: سیستم حذف قطب-صفر ناپایدار ندارد).

# • آرایه های نایکوئیست و باندهای گرشگورین

- تعریف آرایه نایکوئیست ماتریس تابع تبدیل
- تعریف آرایه نایکوئیست معکوس ماتریس تابع تبدیل
- Inverse Nyquist Array (INA)
- قضیه گرشگورین:

## Gershgorin's theorem

Let  $\underline{A}$  be a  $(m \times m)$ -matrix with complex entries  $a_{ij}$ . The eigenvalues  $\lambda_i$  of  $\underline{A}$  are contained in two unions of circles around the diagonal elements with the sum of the moduli of the off-diagonal elements in the same row resp. columns as radii:

$$|\lambda_i - a_{ii}| < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ij}| \quad \text{and} \quad |\lambda_i - a_{ii}| < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{ji}|.$$

## • باندهای گرشگورین

آرایه نایکوئیست ماتریس تابع تبدیل را رسم کنید.  
بازه فرکانسی مناسب را با تعداد مناسب نقاط فرکانسی تعیین نمایید.

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$$

در هر فرکانس ماتریس تابع تبدیل یک ماتریس مختلط است.

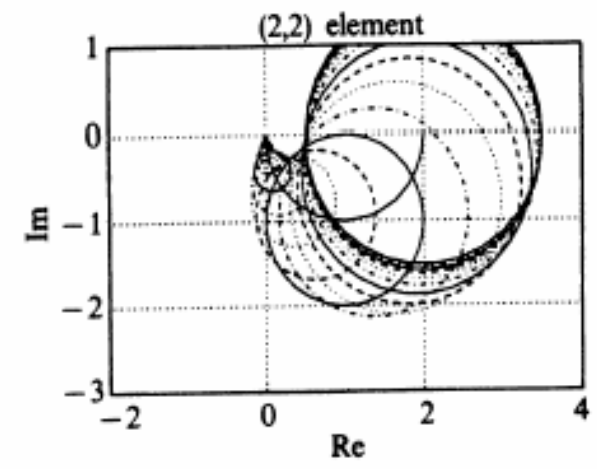
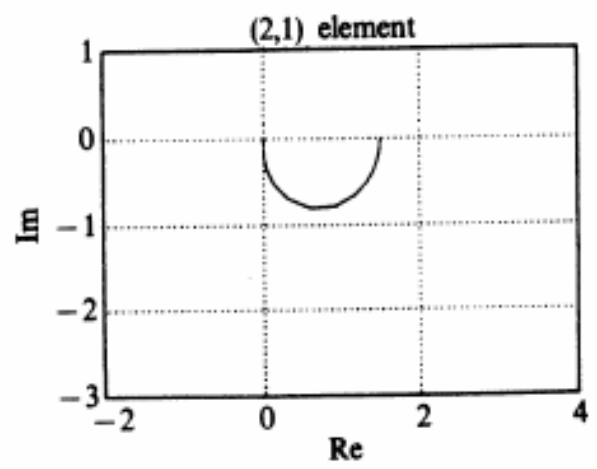
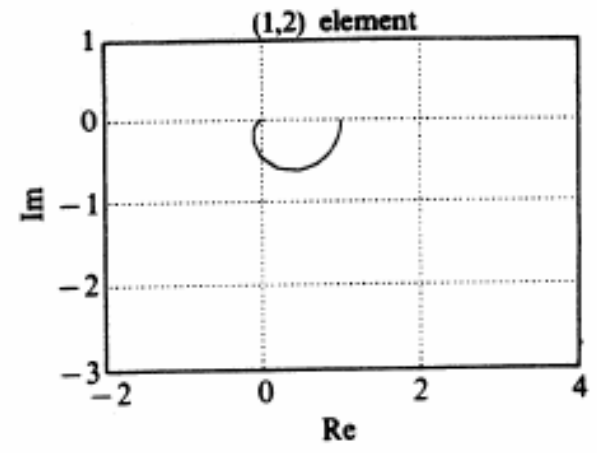
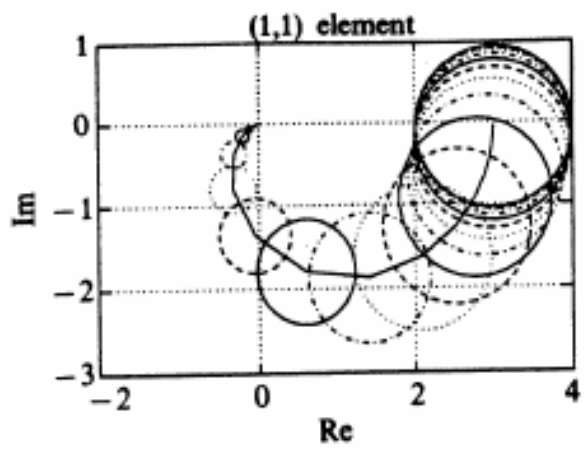
$$G(j\omega_i)$$

دایره های گرشگورین را بر روی عناصر قطری رسم کنید.

$$g_{jj}(j\omega_s) \rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |g_{ij}(j\omega)| \quad 0 \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |g_{ji}(j\omega)|$$

مجموعه ایجاد شده از دایره های گرشگورین را باند گرشگورین می نامند.

• مثال



## نکته کلیدی:

اجتماع باندهای گرشگورین، اجتماع مکان های مشخصه است. به تعداد باندهای گرشگورین اشغال کننده محدوده های مجزا، مکان های مشخصه محصور شده خواهیم داشت. بنابراین، اگر کلیه باندهای گرشگورین نقطه ۱- را در بر نگیرد، می توان پایداری حلقه بسته را با شمارش تعداد چرخش های ۱- توسط باندهای گرشگورین تعیین کرد.

## • غلبه قطری (Diagonal Dominance)

کاربردهای ایده غلبه قطری:

بررسی پایداری حلقه بسته

ارزیابی تداخل Interaction Measure

غلبه قطری ردیفی و ستونی

## تعريف غلبه قطري يك ماتريس گويا

$$Q(s) = [q_{ij}(s)] \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

Row Diagonal Dominance: For all  $s$  on the Nyquist Contour

$$|q_{ii}(s)| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |q_{ij}(s)| \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Column Diagonal Dominance: For all  $s$  on the Nyquist Contour

$$|q_{ii}(s)| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |q_{ji}(s)| \quad i = 1, 2, \dots, m$$

معیار ترسیمی غلبه قطري يك ماتريس گويا ■



**قضیه** اگر کلیه باندهای گرشگورین  $inv(G(s))$ ، نقطه  $-1$  را خارج از خود قرار دهند، می توان پایداری سیستم حلقه بسته را با شمارش تعداد چرخش های نقطه  $-1$  توسط این باندها تعیین کرد. در این حالت  $I+inv(G(s))$  باید غالب قطری بر روی منحنی نایکوئیست باشد.

یک حالت کلی تر:

$$K = \text{diag} \{k_1, \dots, k_m\}$$

**Theorem 2.13** (Rosenbrock, 1970): Suppose that  $G(s)$  is square, that  $K = \text{diag} \{k_1, \dots, k_m\}$  and that

$$\left| g_{ii}(s) + \frac{1}{k_i} \right| > \sum_{j \neq i} |g_{ij}(s)| \quad (2.81)$$

for each  $i$  and for all  $s$  on the Nyquist contour; and let the  $i$ th Gershgorin band of  $G(s)$  encircle the point  $-1/k_i$ ,  $N_i$  times anticlockwise. Then the negative feedback system with return ratio  $-G(s)K$  is stable if and only if

$$\sum_i N_i = P_0 \quad (2.82)$$

where  $P_0$  is the number of unstable poles of  $G(s)$ , and there are no hidden unstable modes.

*Proof:* We know from Section 2.8 that a necessary and sufficient condition for stability is that

$$N = P_0$$

where  $N$  is the number of anticlockwise encirclements of the origin made by  $\det [I + G(s)K]$ , as  $s$  moves once around the Nyquist contour. So, to prove the theorem we need to prove that

$$N = \sum_i N_i \tag{2.83}$$

To do this, note that the  $i$ th Gershgorin band of  $G(s) + K^{-1}$  encircles the origin  $N_i$  times anticlockwise (the condition (2.81) ensuring that it does not cover the origin). But the union of these bands contains the characteristic loci of  $G(s) + K^{-1}$ ; call these characteristic loci  $\mu_i(s)$  ( $i = 1, \dots, m$ ). So we have, as in Section 2.8, that

$$\Delta \arg \det [G(s) + K^{-1}] = \sum_i \Delta \arg \mu_i(s) \tag{2.84}$$

$$= \sum_i N_i \tag{2.85}$$

But

$$\Delta \arg \det [I + G(s)K] = \Delta \arg \det [G(s) + K^{-1}] + \Delta \arg \det (K) \quad (2.86)$$

$$= \Delta \arg \det [G(s) + K^{-1}] \quad (2.87)$$

Hence

$$N = \sum_i N_i \quad \blacksquare$$

Theorem 2.13 can clearly be restated in terms of column dominance instead of row dominance, by replacing (2.81) by

$$\left| g_{ii}(s) + \frac{1}{k_i} \right| > \sum_{j \neq i} |g_{ji}(s)| \quad (2.88)$$

and indeed the theorem holds if *either* (2.81) *or* (2.88) holds at each point on the Nyquist contour. A corresponding theorem can also be stated in terms of the inverse transfer function  $G^{-1}(s)$  (see Exercise 2.11).